HALLIDAY, RESNICK, WALKER, FUNDAMENTOS DE FÍSICA, 4.ED., LTC, RIO DE JANEIRO, 1996.

FÍSICA 2

CAPÍTULO 15 – GRAVITAÇÂO

36. Para diminuir o congestionamento de tráfego entre duas cidades, Boston e Washington, por exemplo, alguns engenheiros propuseram a construção de um túnel ferroviário ao longo da corda (no sentido geométrico) que une as duas cidades (Fig. 15-37). Um trem, que não precisaria de locomotiva e nem de motores, partindo do repouso, cairia através da primeira metade do túnel e, então, subiria até a outra extremidade. Supondo que a Terra é uma esfera uniforme e ignorando o atrito e a resistência do ar, (a) mostre que a viagem entre as duas cidades é equivalente ao percurso da metade de um ciclo de um movimento harmônico simples, e (b) ache o tempo de viagem.

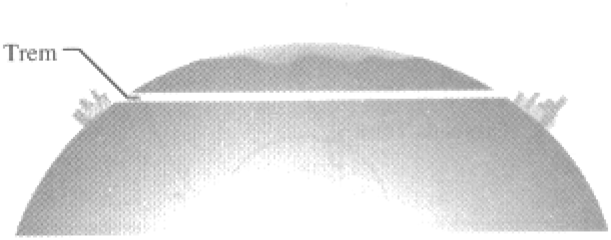
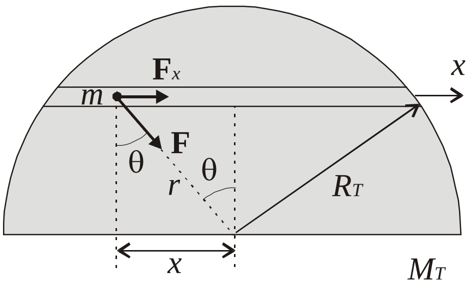


Fig. 15-37 Problema 36. Sem escala.

(**Pág. 73**)

Solução.

(a) Considere o seguinte esquema da situação:



Aplicando-se a segunda lei de Newton na coordenada x:

$$\sum F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-F\,\text{sen}\,\theta = -\frac{GM_r m}{r^2}\frac{x}{r} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{GM_r x}{r^3} = 0 \qquad (1)$$

Na expressão acima, M_r é a massa da esfera de raio r. Para determinar M_r, utilizamos a densidade ρ da Terra:

$$\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{M_r}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$M_r = \frac{M_T r^3}{R_T^3} \qquad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{GM_T}{R_T^3}x = 0$$

A equação diferencial do movimento harmônico simples é:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Comparando-se as duas equações acima concluímos que o movimento do trem sob a ação da gravidade é MHS.

(b) O período do trem vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}$$

O tempo de viagem entre Boston e Washington corresponde à metade do período do MHS:

$$\boxed{t = \pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}}$$